

29-AMALIY MASHG‘ULOT

Ish vaqti va bosqichlari	O‘qituvchi faoliyatining mazmuni	Talabalar faoliyatining mazmuni
I-Bosqich O‘quv mashg‘ulotiga kirish (10 daqiqa)	1.1. Mashg‘ulot mavzusi bo‘yicha tushuncha berish. 1.2. Mavzuning avvalgi o‘tilgan mavzu bilan aloqadorligi bo‘yicha tushuncha berish	Tinglaydilar, yozadilar
II-Bosqich Asosiy (65 daqiqa)	2.1. Amaliy mashg‘ulot mavzusiga oid nazariy ma’lumot berish. 2.2. Mavzuga oid amaliy topshiriqlar bajarish.	Tinglaydilar, yozadilar, savollar beradi, bajaradilar.
III-Bosqich Yakunlovchi (5 daqiqa)	3.1. Amaliy mashg‘ulotni yakunlash 3.2. Talabalarga mustaqil bajarish uchun topshiriqlar berish.	Tinglaydilar, yozadilar, savollar beradi, bajaradilar.

29-MAVZU. O‘ZGARUVCHILARI AJRALGAN DIFFERENSIAL TENGLAMALARGA DOIR MISOLLAR YECHISH

1-reja. $y' = f(x)$ (1) – noma’lum fuksiya qatnashmagan birinchi tartibli eng sodda differensial tenglama. Agar $f(x)$ funksiya I intervalda uzluksiz bo‘lsa, tenglamaning bu intervaldagi **umumiy yechimi** $y(x) = \int f(t)dt + C$ ko‘rinishda yoziladi.

$y' = g(y)$ (2) – erkli o‘zgaruvchi qatnashmagan birinchi tartibli eng soda differensial tenglama. Agar $g(y)$ funksiya I_y intervalda uzluksiz va nolga aylanmasa u holda (2) tenglama $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{g(y)}$ tenglamaga teng kuchli bo‘ladi va uning

umumiy yechimi $x(y) = \int \frac{dy}{g(y)} + C$ ko‘rinishda yoziladi.

2-reja. $f(x)dx = g(y)dy$ (3) ko‘rinishda yozish mumkin bo‘lgan teglamalarni **o‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamalar** deb ataymiz. $f(x), g(y)$ funksiyalar uzluksiz bo‘lgan Γ sohada (3) tenglamaning **umumiy yechimi** $\int f(x)dx = \int g(y)dy + C$ ko‘rinishda yoziladi.

1-Misol. $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}$ tenglamani (3) ko‘rinishda yozish mumkin:
 $\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2}$. Umumiy yechimni yozamiz: $\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{1+x^2} + C$; yoki
 $\arctg y = \arctg x + C$.

Berilgan tenglamani yechish jarayonida $1 + y^2$ ifodaga bo'lish bajarildi. $1 + y^2 \neq 0$ bo'lgani uchun bu amalni bajarish mumkin.

Javob: $\arctgy = \arctgx + C$.

3-reja. $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ (4) ko'rinishda yozish mumkin bo'lgan tenglamalarni bir jinsli differensial tenglamalar deb ataymiz. (4) tenglamani integrallash uchun $y = ux$ almashtirish bajaramiz, bunda $u = u(x)$ – yangi noma'lum funksiya. Natijada $u + u'x = f(u)$; yoki $\frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x}$ – o'zgaruvchlari ajralgan differensial tenglama hosil bo'ladi. Bu tenglamaning umumiy yechimi formulasida $u = \frac{y}{x}$ almashtirish bajarsak (4) tenglamaning umumiy yechimi topiladi. Agar $f(u) = u$ bo'lsa (4) tenglama $y' = \frac{y}{x}$ ko'rinishga ega bo'ladi va uning umumiy yechimi $y = Cx$ ko'rinishga ega.

2-Misol. $y' = -\frac{y}{x}$ tenglamani integrallaymiz. $y = ux$ almashtirish bajaramiz, natijada: $u + u'x = -u$; $\frac{du}{u} = -\frac{2dx}{x}$; $\ln u = \ln \frac{C}{x^2}$; $u = \frac{C}{x^2}$. Bu formulada $u = \frac{y}{x}$ almashtirish bajarsak berilgan tenglamaning umumiy yechimi hosil bo'ladi: $y = \frac{C}{x}$.

Berilgan tenglamani yechish jarayonida u ga bo'lish bajarildi. $u = 0$ bo'lgan holni tekshiramiz. Bu holda almashtirish formulasiga ko'ra $y = 0$ hosil bo'ladi. Bu funksiya qaralayotgan tenglamani qanoatlantiradi va uni umumiy yechim formulasida $C = 0$ bo'lganda hosil qilish ham mumkin. **Javob:** $y = \frac{C}{x}$.

4-reja. $y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right)$ (5) – ko'rinishdagi differensial tenglamalarni

o'rganaylik. **I.** $c = c_1 = 0$ bo'gan hol. Bu holda (5) tenglama $y' = f\left(\frac{ax + by}{a_1x + b_1y}\right)$

ko'rinishga ega bo'lib uni (4) ko'rinishda yoza olamiz: $y' = f\left(\frac{a+b \cdot \frac{y}{x}}{a_1+b_1 \cdot \frac{y}{x}}\right) = g\left(\frac{y}{x}\right)$.

II. c va c_1 lardan kamida bittasi noldan farqli bo'lsin. **A)** $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$ bo'lgan hol. Bu holda $a_1 = ka, b_1 = kb$ tengliklarga ko'ra (5) tenglama $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{k(ax+by)+c_1}\right)$ ko'rinishni oladi. Tenglamada $z = ax+by$ almashtirish bajaramiz, bunda $z = z(x)$ – yangi noma'lum funksiya. Natijada $z' = bf\left(\frac{z+c}{kz+c_1}\right) + a = g(z)$ – erkli o'zgaruvchi qatnashmagan birinchi tartibli eng soda differensial tenglama hosil bo'ladi. Bu tenglamaning umumiy yechimi formulasida $z = ax+by$ almashtirish bajarsak (5) tenglamaning umumiy yechimi hosil boladi.

B) $\Delta \neq 0$ bo'lgan hol. Bu holda $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a_1x+b_1y+c_1=0 \end{cases}$ sistema yagona (x_0, y_0) yechimga ega. (5) tenglamada $x = X + x_0, y = Y + y_0$ almashtirish bajaramiz, bunda X – yangi erkli o'zgaruvchi, $Y = Y(X)$ – yangi noma'lum funksiya. Natijada $Y' = f\left(\frac{aX+bY}{a_1X+b_1Y}\right)$ tenglama hosil bo'ladi. Bunday ko'rinishdagi tenglamani yuqorida o'rgandik. Bu tenglamaning umumiy yechimi formulasida $X = x - x_0, Y = y - y_0$ almashtirish bajarsak (5) tenglamaning umumiy yechimi hosil bo'ladi.

Ba'zan $y' = f(x, y)$ tenglamada $y = z^m$ almashtirish bajarish bilan bir jinsli differensial tenglama hosil qilinadi, bunda $z = z(x)$ – yangi noma'lum funksiya.

3-Misol. $\frac{2}{3}xyy' = \sqrt{x^6 - y^4} + y^2$ tenglamani bir jinsli tenglamaga keltirib integrallaylik. $y = z^m$ almashtirish bajaramiz: $\frac{2}{3}xz^m m z^{m-1} z' = \sqrt{x^6 - z^{4m}} + z^{2m}$;

$z' = \frac{3}{2m} \cdot \frac{\sqrt{x^6 - z^{4m}} + z^{2m}}{xz^{2m-1}}$. Agar $6 = 4m$ bo'lsa ohirgi tenglamani (4) ko'rinishda yozish mumkin, ya'ni $z' = \frac{\sqrt{x^6 - z^6} + z^3}{xz^2} = \sqrt{\left(\frac{x}{z}\right)^4 - \left(\frac{z}{x}\right)^2} + \frac{z}{x}$.

$$z = ux \text{ almashtirish bajaramiz: } u + u'x = \sqrt{\frac{1-u^6}{u^4}} + u; \quad \frac{u^2 du}{\sqrt{1-u^6}} = \frac{dx}{x};$$

$$\int \frac{d(u^3)}{\sqrt{1-(u^3)^2}} = 3 \int \frac{dx}{x} + \ln C; \quad \arcsin u^3 = \ln Cx^3; \quad \arcsin \left(\frac{z}{x} \right)^3 = \ln Cx^3;$$

$$\arcsin \frac{y^2}{x^3} = \ln Cx^3 \text{ qaralayotgan tenglamaning umumiy yechimi.}$$

Berilgan tenglamani integrallash jarayonida $xz^2, \sqrt{1-u^6}$ ifodalarga bo'lish bajarildi. $xz^2 = 0$ bo'lgan holni tekshiraylik. Bu holda $x=0$ hmda almashtirish formulasiga ko'ra $y=0$ fuksiyalar hosil bo'ladi. Bu funksiyalar berilgan tenglamani qanoatlantirmaydi. $1-u^6=0$ bo'lgan holni o'rganaylik. Bu holda $u=1, u=-1$ o'z mavbatida $z=x, z=-x$ va bundan $y=x^{3/2}, (x>0), y=(-x)^{3/2}, (x<0)$ funksiyalar hosil bo'ladi. Bu funksiyalar berilgan tenglamani qanoatlantiradi va umumiy yechimda $C=x^{-3}e^{\pi/2}, C=x^{-3}e^{-\pi/2}$ bo'lgan holda hosil bo'ladi, ya'ni o'zgarmas parametr x ga bo'g'liq aniqlanyapti. Demak $y=x^{3/2}, (x>0), y=(-x)^{3/2}, (x<0)$ funksiyalar tenglamaning mahsus yechimlari ekan.

$$\textbf{Javob:} \arcsin \frac{y^2}{x^3} = \ln Cx^3, y = \begin{cases} x^{3/2}, & x > 0 \\ (-x)^{3/2}, & x < 0 \end{cases}.$$

Misollar va masalalar

Differensial tenglamaning umumiy yechimini toping:

- a) $(1+x^2)y' + 1 + y^2 = 0;$
- б) $(x^2+x)y' = 2y+1;$
- в) $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y';$
- г) $xy' + 2\sqrt{xy} = y;$
- д) $(x-2y-3)y' + (2x+y-1) = 0;$
- е) $(x-y+4)dy + (x+y-2)dx = 0.$